Istituzioni di Matematiche

A.A. 2004/2005

— Corso B —

<u>**Calendario delle lezioni dettagliato**</u> (versione definitiva)

6/10 Quattro chiacchiere per iniziare. La matematica ed il suo linguaggio: proposizioni e predicati. I quantificatori $\forall$, $\exists$, $\exists!$ ed i connettivi logici $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$.
Nozione ingenua di insieme. Insieme ambiente, sottoinsiemi propri e banali. Unione, intersezione e complementazione di insiemi. Qualche proprietà delle operazioni insiemistiche.
Gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (anche quest'ultimo dato "per noto"). Chiusura o meno rispetto alle quattro operazioni. Relazioni d'ordine: $\geq$, $>$, $\leq$ e $<$.

11/10 Breve excursus sulla nozione di dimostrazione. Dimostrazioni dirette e dimostrazioni per assurdo (ad esempio, come si può dimostrare che (n^2 pari) $\Rightarrow$ (n pari), per ogni $n \in \mathbb{N}$?)
Insufficienza di $\mathbb{Q}$: le soluzioni di $x^2 = 2$ non sono numeri razionali (con dimostrazione).
Gli intervalli in $\mathbb{R}$: $[x_0, x_1]$, $]x_0, x_1]$, ecc. Definizione di maggiorante, minorante, di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato e di insieme limitato. Definizione di massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di un insieme. Qualche esempio facile.

13/10 Ancora sull'estremo superiore (ed inferiore). Formulazione equivalente della definizione di sup e inf "con l'ε". Negare che $a' = \sup A$ equivale a ...
Controllo del fatto che $\sup\{1-1/n,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\} = 1$. Un esempio più critico: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ha sup in $\mathbb{Q}$ (senza dettagli). Proprietà di completezza dei numeri reali. *Teorema dagli elementi separatori* (senza dimostrazione).
Concetto di funzione. Dominio, codominio, immagine di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive e biettive. Esempi semplici: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2x - 3$, definite da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

18/10 [**esercitazione**] Funzioni elementari. Valore assoluto, polinomi, potenze con esponente reale, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e loro inverse (meglio, inverse delle loro restrizioni ...)
Grafici qualitativi di queste funzioni. Detta f una qualunque di queste funzioni elementari, ricostruzione del grafico di $af(\cdot - b) + c$, noto il grafico di f, per qualche valore di a, b, c.

20/10 Ancora generalità sulle funzioni. Definizione di controimmagine di un punto appartenente al codominio di una funzione.
Vengono considerati esempi più critici (funzioni definite "a pezzi", cambiamento del valore in un punto del dominio di una preassegnata funzione ...) Valutazione di $\sup \operatorname{Im} f$ ed $\inf \operatorname{Im} f$ in qualche caso particolarmente semplice.
Riconoscimento dal grafico delle proprietà di iniettività a suriettività di una funzione.
Funzione inversa. Nozione intuitiva e formalizzazione matematica. Alcuni esempi. Discussione sulla validità delle formule $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$. Caso particolare esaminato: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Introduzione di $\sqrt{\cdot}$ come inversa della restrizione della funzione $x \mapsto x^2$ a $\mathbb{R}_+$. Anche funzioni "fortemente" non iniettive, come sen e cos possono essere invertite: concetto di restrizione

di una funzione ed introduzione di arcsin, arccos e arctan. Solo dell'ultima si considera nel dettaglio il grafico e le sue proprietà.

25/10 [**esercitazione**] Esercizi su $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\inf f$, esempi concreti cercando $\mathrm{Im}\,(f)$, l'insieme dei maggioranti (minoranti) di $\mathrm{Im}\,(f)$ e cercando $\sup f$ come il minimo dei maggioranti.
Gli esempi fatti sono: $f(x) = 2$, $f(x) = -2(x+1)^2$, (di quest'ultima si è dedotto il grafico per traslazione e simmetria da quello di x^2); $f(x) = 1/x$, con dominio ora $(-\infty, 0)$, ora $[1, 2)$ ora $(1, 2]$. Si è insistito particolarmente sugli esempi nei quali comparivano insiemi dotati di estremo superiore ma non di massimo.
Un esempio più complesso in cui si mette in luce il ruolo della ricerca di minimi: il problema di *Protein Folding* come minimizzazione di un opportuna energia potenziale.
Il valore assoluto, definizione, proprietà, significato grafico. Esempio: equazione $|x| = |x+1|$ risolta prima algebricamente e poi con il metodo grafico. Interpretazione di $|x-y|$ come distanza (analitica e grafica) e applicazione a scritture come $|x-2| \leq \delta$ e $|x-1| = \varepsilon$.
La composizione di funzioni, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Relazione fra $\mathrm{Im}\,(f)$ e $\mathrm{dom}\,(g)$ per poter dare senso alla scrittura $g(f)$. Esempio con $f = x^2$ e $g = (x+1)/(x-1)$, in cui si precisa in quali condizioni ha senso comporre f con g e g con f.
Estensione al caso di tre o più funzioni da comporre.

27/10 Successioni reali: definizione ed esempi: $a_n = n^2$, $a_n = (-1)^n$, $a_n = (-1)^n/n$. Un esempio importante di successione che nasce da un problema antico: l'approssimazione dell'area del cerchio con l'area dei poligoni regolari inscritti. Comparsa in nuce del problema del limite di una successione.
Definizione di successione non decrescente, crescente, non crescente, decrescente, inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata, positiva e negativa. Definizione di proprietà valida *definitivamente*, riferita ad una successione. Le successioni definitivamente limitate sono quelle limitate!
Studio della limitatezza e della monotonia della successione $a_n = n/(n+1)$.
Definizione di limite finito di una successione. Dapprima la definizione è presentata graficamente, poi formalmente. Verifica del fatto che $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Di nuovo si insiste sull'aspetto grafico della questione, prima di affrontare quello formale.

3/11 Definizione di limite $\pm\infty$ per successioni e interpretazione grafica. Definizione di successioni regolari. Qualche esempio di successione non regolare.
Linearità del limite: il caso in cui tutti i limiti in gioco siano finiti: $\lim_n(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_n a_n + \beta \lim_n b_n$, $\lim_n a_n b_n = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n$ e $\lim_n a_n/b_n = \lim_n a_n / \lim_n b_n$ (purché il denominatore non sia nullo). Si è dimostrata solo la prima formula nel caso $\alpha = \beta = 1$. Generalizzazione della linearità al caso in cui uno o più limiti siano infiniti. Introduzione spicciola dell'algebra in $[-\infty, +\infty]$. Definizione di forma indeterminata e discussione delle forme indeterminate $\infty - \infty$, $0/0$ e ∞/∞. Esempi banali di "uscita dall'indeterminazione": $a_n = n^2/n$ e $a_n = n/n^2$. Esempio più critico $n \operatorname{sen} 1/n$, semplicemente accennato.
Teorema dei due carabinieri. Esempio con $0 \leq \operatorname{sen} 1/n \leq 1/n$. *Teorema della permanenza del segno*, e i suoi due corollari immediati: *segno del limite* a partire dal segno della successione e *confronto* (questi due con dimostrazione).
Si enuncia l'utile proposizione che riguarda il prodotto di successioni limitate per successioni infinitesime. Esempio $(-1)^n/n$ e $(\arctan n \cdot \cos n^5)/n$. *Teorema fondamentale delle successioni monotone* (con dimostrazione).

8/11 [**esercitazione**] Il calcolo di limite di successioni. Rapporto tra polinomi o pseudopolinomi, esempio: $a_n = (n^2 + (-1)^n)/(2n^2 + \arctan n)$. Esponenziali e logaritmi: $\lim_n e^n/n^M$ e $\lim_n \log n/n^\varepsilon$. Qualche limite notevole "dato per buono" (verranno ripresi quando si parlerà

di limite di funzioni): $n \operatorname{sen} 1/n \to 1$, $(1+1/n)^n \to e$, $n^2(1-\cos 1/n) \to 1/2$, $n(e^{1/n}-1) \to 1$ e relativi esercizi. Esempi tipo $n^{1/n}$, dove giova esprimere tutto in base e.
Concetto intuitivo di "velocità" con cui una successione diverge o tende a zero. Confronti e discussione critica con esempi.

10/11 Limiti di funzioni: $\lim_{x\to x_0} f(x)$. La definizione data si appoggia sul concetto noto di limite di successione. Vengono esplicitati alcuni casi: limite finito e x_0 finito, limite finito e $x_0 = +\infty$ e così via. In ciascun caso si esamina un esempio semplice.
Un esempio critico: $\lim_{x\to 0} 1/x$ non esiste. Definizione di limite destro e limite sinistro dati ancora appoggiandosi alle successioni.
Caratterizzazione del limite "con ε e δ". Vengono esaminati tutti casi, a seconda che x_0 o il limite siano finiti o $\pm\infty$.
Come esempio (facile) si controlla che $\lim_{x\to 5}(x^2-1) = 24$.

15/11 Precisazione di punto x_0 non isolato, rispetto al dominio di una funzione f.
Equivalenza tra la definizione di limite per successioni e quella "con ε e δ": si dimostra il caso in cui il limite ed il punto x_0 in cui lo si cerca sono entrambi finiti. Linearità dell'operatore $\lim_{x\to x_0}$. Estensione al caso in cui uno o più limiti in gioco siano infiniti. Forme indeterminate. Limite e composizione di funzioni: *teorema di composizione del limite.* Come esempi si considerano i limiti $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ e $f(x) = \cos(\log(1+x))$, per x tendente a $+\infty$ e a 0, rispettivamente.
Funzioni continue. Definizione di funzione continua in un punto e di funzione continua in un intervallo. Viene discussa come esempio di funzione non continua la funzione $f(x) = \operatorname{sign} x$. Somma, prodotto, quoziente (se il denominatore non si annulla) e composizione (quando possibile) di funzioni continue su uno stesso intervallo danno ancora funzioni continue. Prima ovvia conseguenza: tutti i polinomi sono funzioni continue in $\mathbb{R}$. Viene enunciato il teorema che asserisce che tutte le funzioni elementari sono continue nei loro consueti domini di definizione. Come esempio di composizione di funzioni continue si osserva che la funzione $f(x) = \cos(e^{x^2} - \operatorname{sen}(x^3-1))$ è continua in $\mathbb{R}$.
Il *Teorema di Weierstraß*: enunciato e controesempi critici ottenuti eliminando parti dell'ipotesi del teorema.

17/11 Punti di discontinuità e loro classificazione. *Teorema degli zeri*, *Teorema della permanenza del segno* e *Teorema dei valori intermedi.* Di ogni teorema si discutono esempi e controesempi semplici.
Concetto intuitivo di derivata: interpretazione del rapporto incrementale in alcuni contesti fisici o biologici. Definizione di derivata. Interpretazione grafica della definizione di derivata. Continuità di una funzione derivabile in un punto (con dimostrazione). Esempio di una funzione continua ma non derivabile: $f(x) = |x|$. Regole di calcolo della derivata: somma, differenza, prodotto, quoziente e composizione di funzioni derivabili.

22/11 Tabella delle funzioni elementari e delle loro derivate: si sono fornite in maniera "assiomatica" le formule di derivazione delle funzioni seguenti: $f(x) = \alpha$, $f(x) = x^\alpha$ (in particolare $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$), $f(x) = a^x$ (in particolare $f(x) = e^x$), $f(x) = \log_a x$ (in particolare $f(x) = \log x$), $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ e $f(x) = \arctan x$, precisando di volta in volta il dominio della funzione da derivare e l'insieme di variabilità dei parametri α e a. La conoscenza di queste derivate e delle regole di calcolo delle derivate viste la lezione precedente condentono di derivare funzioni anche complicate. Un esempio semplice: $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.
Massimi e minimi relativi di una funzione. *Teorema di Fermat* (con dimostrazione), *Teorema di Rolle* (con dimostrazione), *Teorema di Lagrange* (con dimostrazione), e *Corollario* del Teorema

di Lagrange: f costante in $[a,b] \Leftrightarrow f' = 0$ in tutto $[a,b]$ (con dimostrazione). Di ogni teorema enunciato si è data una prima versione non rigorosa, appoggiandosi al significato geometrico del teorema stesso (quando possibile), poi si è data la formulazione matematica rigorosa. Inoltre ogni volta si è osservato con dovizia di controesempi la necessità delle ipotesi di volta in volta considerate.

24/11 [**esercitazione**] Esercizi sulle derivate: (come da tabella) derivata della somma, del prodotto, del rapporto e della composizione di funzioni, utilizzando derivate di funzioni note come potenze, seno, coseno, tangente, esponenziale e logaritmo.
Esercizi sulla continuità e derivabilità di funzioni definite a tratti, come ad esempio $f(x) = \sqrt{x-1}$, per $x \geq 1$ e $x + \alpha$, per $x < 1$.

29/11 [**esercitazione**] Studio di funzioni: dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti, asintoti, derivata prima, monotonia, estremi relativi e grafico qualitativo. Esempi concreti: $f(x) = x^3/(x^2-1)$, $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2-2x-3}$. (per estremi e monotonia si sono avvisati gli studenti che i teoremi relativi sarebbero stati enunciati in seguito).

1/12 Monotonia e segno della derivata prima: enunciato del teorema. Derivata della funzione inversa. Commenti ed esempi. Convessità e concavità: definizioni date per via geometrica. Legame tra convessità, derivate prime e seconde. Enunciato del teorema.
Asintoti orizzontali, verticali ed obliqui. Metodo di ricerca di questi ultimi e qualche esempio.
Studio di funzione: si esamina un esempio con criticità, mettendo in luce l'importanza di tutti gli strumenti teorici a disposizione: dai metodi di risoluzione di equazioni e disequazioni, allo studio del segno della derivata seconda.

14/12 Ancora sullo studio di funzioni: esempi più complessi. Punti di flesso di una funzione. Discussione sui legami tra monotonia e convessità o concavità di una funzione. Si mette in luce con l'ausilio di esempi grafici il fatto che le proprietà suddette sono indipendenti. Si osserva che le uniche funzioni convesse definite su tutto $\mathbb{R}$ e limitate sono le costanti, con l'accenno di una dimostrazione grafica.

15/12 [**esercitazione**] Esercizi sullo studio di funzioni. Si coglie l'occasione per rispolverare qualche tecnica risolutiva per equazioni e disequazioni di vario genere (radicali, fratte, con valori assoluti, logaritmiche, esponenziali, ...). Un esempio considerato è dato dalla funzione $y = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$.

20/12 L'integrale definito. Si presenta l'idea intuitiva che si seguirà per la definizione, riferendosi al caso delle funzioni continue e non negative, utilizzando, senza precisarlo, il concetto di area del sottografico. Definizione rigorosa di somma integrale superiore e somma integrale inferiore. Definizione di integrale definito di una funzione (limitata) di segno qualunque.
Proprietà di linearità dell'integrale definito. Proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione e di isotonia.
Vengono enunciati i teoremi che garantiscono che le funzioni continue, le funzioni monotone e le funzioni generalmente continue (cioè funzioni che hanno al più un numero finito di discontinuità eliminabili o di salto) definite su intervalli chiusi e limitati sono integrabili.
In ultimo, si introduce la funzione di Dirichlet e si mostra in maniera non rigorosa il fatto che questa funzione non è integrabile.

22/12 *Teorema della media* (con dimostrazione): versione con f solo integrabile e versione con f continua (versioni talvolta dette *primo* e, rispettivamente *secondo teorema della media*).
Teorema fondamentale del calcolo (con dimostrazione).
Definizione di primitiva di una funzione continua definita in un intervallo $[a,b]$. *Caratterizzazione delle primitive di una funzione* (con dimostrazione). *Formula di Torricelli-Barrow*

(talvolta detta *secondo teorema fondamentale del calcolo*) (con dimostrazione).
Definizione di integrale indefinito.
Esempi di integrali diretti, ottenuti leggendo "da destra a sinistra" la tabella delle derivate delle funzioni elementari. Ad esempio $\int \operatorname{sen} x\, dx$ e $\int x^2\, dx$.
Formula generale per l'integrale di x^α.

10/01 Breve riepilogo della situazione: definizione di integrale definito, primo teorema fondamentale del calcolo, primitive, formula di Torricelli-Barrow.
Formula di integrazione per parti. Esempi trattati: $\int xe^x\, dx$, $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, $\int \log x\, dx$. Si accenna al fatto che la formula può essere iterata, come ad esempio in $\int x^2 e^x\, dx$.
Formula di integrazione per sostituzione (diretta): $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a'}^{b'} f(g(t))g'(t)\, dt$, dove $a' = g^{-1}(a)$ e $b' = g^{-1}(b)$. Si esamina l'esempio $\int_0^1 (x/\sqrt{1+x})\, dx$.
Serie. Breve preludio: "*Achille e la tartaruga*".
Come formalizzare matematicamente l'idea di una "somma di infiniti termini"? Concetto di successione delle ridotte (o somme parziali) e definizione formale di serie convergente, divergente ed oscillante. Qualche esempio semplice. Si mette in luce che la difficoltà maggiore per le serie è l'impossibilità di conoscere esplicitamente la successione delle ridotte a partire dal termine generale (a parte qualche caso particolare, come quello seguente).
Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$: si trova la successione delle ridotte e se ne commenta il comportamento, al variare della ragione $r \in \mathbb{R}$.

12/01 [**esercitazione**] Esercizi sugli integrali definiti ed indefiniti. Più nel dettaglio, si sono svolti esercizi sugli integrali immediati, su integrali della forma $\int f'G'(f)\, dx$, con particolare attenzione al caso $\int f'/f\, dx$.
Si osserva che funzioni integrande dispari hanno integrale nullo su intervalli simmetrici rispetto all'origine.
Qualche esercizio di calcolo degli integrali usando la proprietà di additività sugli intervalli, ad esempio per il calcolo di $\int_{-2}^1 |x|\, dx$.
Dimostrazione della formula di integrazione per parti e relativi esercizi. Formula di integrazione per sostituzione: si considera un esempio.

14/01 *Condizione necessaria per la convergenza di una serie* (con dimostrazione).
Serie a termini positivi. *Carattere "aut-aut" delle serie a termini positivi* (o convergono o divergono a $+\infty$), con dimostrazione.
Criterio del confronto, *Criterio del confronto asintotico*, *Criterio del rapporto (asintotico)* e *Criterio della radice (asintotico)*. Per ognuno di questi criteri si esaminano esempi di applicabilità ed esempi di non-applicabilità.

14/01 Serie a termini di segno qualunque. Serie assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. *Criterio di Leibniz.* Il resto della lezione è dedicato alla risoluzione di numerosi esercizi sulle serie.

19/01 *Equazioni differenziali.* Lunga introduzione all'argomento. Vengono discussi esempi intuitivi provenienti dalla cinematica, dalla biologia, dall'economia. Si evidenziano i tipi di problemi che si possono incontrare nel tentativo di risolvere un'equazione differenziale (non esistenza delle soluzioni, non predicibilità dell'intervallo di esistenza, non unicità e mancanza di tecniche risolutive). Breve excursus sulle funzioni di due variabili reali: dominio, rappresentazione del grafico, continuità e regolarità C^1 (questi due ultimi concetti non vengono precisati con estremo rigore).
Equazioni del primo ordine (poste in forma normale) $x' = f(t,x)$ e relativo *Problema di Cauchy. Teorema di esistenza ed unicità in piccolo* (nell'ipotesi larga: f di classe C^1).

Equazioni lineari del primo ordine. Si dà la formula risolutiva e si svolgono alcuni esercizi in proposito.

21/01 *Equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti.* Si affronta prima la questione della risoluzione dell'equazione omogenea: si esaminano tutti e tre i casi possibili, a seconda che l'equazione algebrica associata abbia due soluzioni distinte, abbia una radice doppia oppure non abbia alcuna radice reale.
Poi si passa all'esame della soluzione particolare: tale ricerca si effettua con il "metodo di somiglianza". Si prendono in esame alcuni casi semplici (termine forzante polinomiale o esponenziale). Struttura dell'integrale generale. Vengono esaminati alcuni casi, fornendo anche le condizioni iniziali.

24/01 Si riprende in esame l'equazione lineare del second'ordine a coefficienti costanti e si esamina il caso in cui il termine noto è una soluzione dell'omogenea associata. Non si insiste molto su questo aspetto e si esamina solo il semplice esempio: $x'' - 4x = e^{2t}$.
Equazioni a variabili separabili. Ricerca delle soluzioni costanti e metodo di separazione delle variabili. Vengono discussi molti esempi e si osserva che la soluzione si trova spesso espressa in forma implicita e non sempre si riesce ad esplicitarla manualmente. In tali casi essa può lasciarsi scritta implicitamente.
In ultimo, partendo dal problema fisico della caduta di un grave di massa m soggetto alla forza di gravità mg ed ad una forza resistente proporzionale alla velocità (kx'), si giunge all'equazione $x'' + (k/m)x' = g$. Imponendo che, ad esempio, $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$ si perviene alla legge oraria del grave che, per tempi grandi, si vede precipitare con velocità "quasi" costante pari a gm/k.

28/01 Viene svolto un tema d'esame, commentando dettagliatamente i vari passaggi. Si riassumono gli argomenti svolti durante il corso, lezione per lezione, precisando di volta in volta i concetti-chiave che è bene che lo studente acquisisca con padronanza. Il corso viene chiuso con l'auspicio di avere un numero consistente di iscrizioni ai primi due appelli.