

Corso di Laurea in Scienze Biologiche

Esercizi su insiemi e funzioni

1) Dire quali dei seguenti insiemi $A \subset \mathbb{R}$ sono superiormente limitati e quali hanno massimo (e, in questo caso, specificare tale massimo).

$$A = \{x = 1 - 1/n, n \in \mathbb{N}, n > 0\}, \quad A = \{x = n^2, n \in \mathbb{N}\},$$
$$A = \{y = -\sqrt{x}, x \geq 0\}, \quad A = \{y = 10 - x, x > 0\}, \quad A = \{y = 5 - x, x \geq 0\}.$$

2) Disegnare “per punti” le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Indicare, per ciascuna, il campo di esistenza e lo spazio immagine:

$$f(x) = 2x + 3, \quad f(x) = \sqrt{x-4}, \quad f(x) = \sqrt{x} - 4, \quad f(x) = |2x + 4|,$$
$$f(x) = |x| + 4, \quad f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad f(x) = |x^2 - 1|.$$

3) Date le seguenti coppie di funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, calcolare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Specificare il campo di esistenza e lo spazio immagine di tali funzioni.

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x^2;$$
$$f(x) = 2x + 2, \quad g(x) = |2x|;$$
$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 1 \quad (\text{attenzione!}).$$

4) Date le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dire quando f è invertibile. Calcolare, quando possibile, la funzione inversa f^{-1} . Specificare campo di esistenza e immagine per ciascuna delle funzioni f e f^{-1} .

$$f(x) = 2x + 5, \quad f(x) = -x + 7, \quad f(x) = x^2 - 1, \quad f(x) = \sqrt{x+1} + 1,$$
$$f(x) = |\sqrt{x} + 1|, \quad f(x) = |\sqrt{x} - 1|, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
$$f(x) = x^3 + 3, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ -\sqrt{x} - 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

5) Dire quali delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono superiormente limitate, inferiormente limitate, limitate. Dire quali hanno massimo e quali hanno minimo. Specificare gli (eventuali) valori massimo e minimo e i relativi punti di massimo e di minimo.

$$f(x) = 77, \quad f(x) = \sqrt{2x}, \quad f(x) = x^2 + 3, \quad f(x) = \sin(2x) - 2,$$
$$f(x) = (x^2 - 1)^2, \quad f(x) = |x + 1|, \quad f(x) = ||x| - 1|, \quad f(x) = |\sqrt{x} - 1|,$$
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x > 0 \\ x + 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \leq 0 \\ x + 5 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$